Funciones, Asíntotas. Extremos. Representación

1) $f'(x) = 4x^3 - 6x$

$f''(x) = 12x^2 - 6$

$f'''(x) = 24x$

$$f''(x) = 0 \longrightarrow 12x^2 - 6 = 0 \longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Los intervalos a considerar son: $\left(-\infty, -\sqrt{1/2}\right)$; $\left(-\sqrt{1/2}, +\sqrt{1/2}\right)$ y $\left(+\sqrt{1/2}, +\infty\right)$.

Del primer intervalo tomamos, por ejemplo $x = -3$

$f''(-3) = 12 \cdot (-3)^2 - 6 = 102 > 0 \Longrightarrow f$ convexa en $\left(-\infty, -\sqrt{1/2}\right)$

Del segundo intervalo tomamos, por ejemplo $x = 0$

$f''(0) = 12 \cdot (0)^2 - 6 = -6 < 0 \Longrightarrow f$ cóncava en $\left(-\infty, -\sqrt{1/2}\right)$

Del tercer intervalo tomamos, por ejemplo $x = 3$

$f''(3) = 12 \cdot (3)^2 - 6 = 102 > 0 \Longrightarrow f$ convexa en $\left(-\infty, -\sqrt{1/2}\right)$

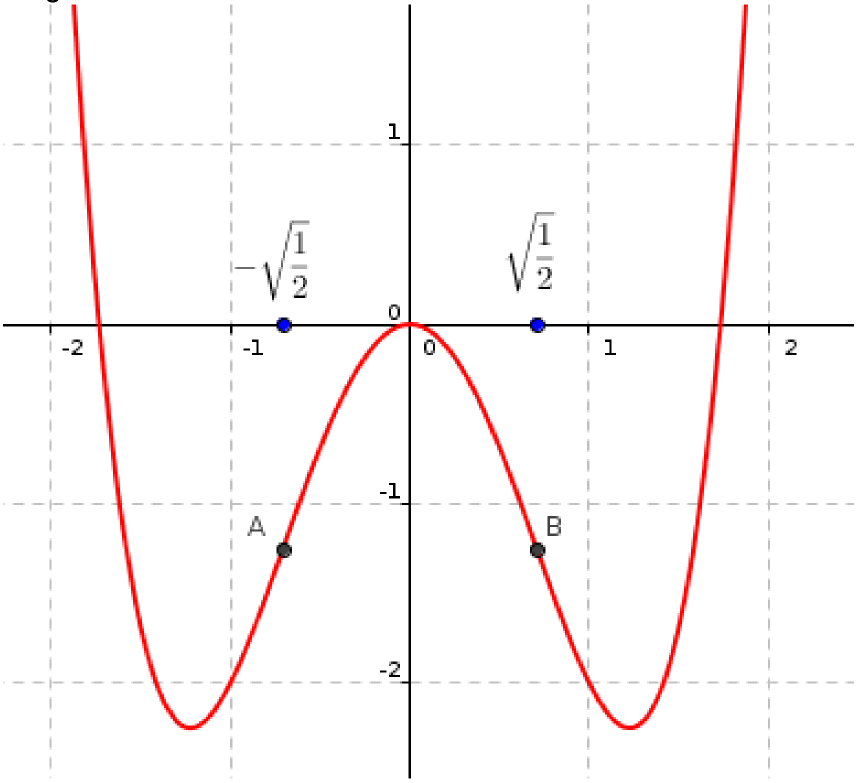
Para los puntos de inflexión tenemos, como candidatos, los puntos donde se anula la segunda derivada: $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. Le aplicamos la 3ª derivada:

- $f'''\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 24\sqrt{\frac{1}{2}} \neq 0 \Longrightarrow$ es punto de inflexión.

- $f'''\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = 24 \cdot \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \neq 0 \Longrightarrow$ es punto de inflexión.

Ambos son puntos de inflexión. Si nos pidiesen la segunda coordenada de esos puntos de inflexión usaríamos la función original (sustituyendo x por el punto).

La gráfica de la función sería:



Estudia la curvatura y puntos de inflexión de la función $f(x) = x^4 - 3x^2$

2) La asíntota oblicua es de la forma $y = mx + n$,

donde:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \; ; \; n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{4x^2 + 2x - 2}{3x - 1} : \frac{x}{1} = \frac{4x^2 - 2x - 2}{3x^2 - x}$$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 - 2x - 2}{3x^2 - x} = \frac{4}{3}$$

$$f(x) - mx = \frac{4x^2 + 2x - 2}{3x - 1} - \frac{4x}{3} =$$

$$= \frac{3(4x^2 + 2x - 2) - 4x(3x - 1)}{(3x - 1) \cdot 3} = \frac{10x - 6}{9x - 2}$$

$$n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} \frac{10x - 6}{9x - 3} = \frac{10}{9}$$

Por tanto la asíntota oblicua es $y = \frac{4}{3}x + \frac{10}{9}$

Halla la asíntota oblicua de la función:

- $f(x) = \dfrac{4x^2 + 2x - 2}{3x - 1}$

3) Calcula las asíntotas verticales y estudia el comportamiento en sus proximidades, de la función

$$y = \frac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$$

4) Halla las asíntotas horizontales de las funciones:

- $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$
- $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$
- $y = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$

- $y = \dfrac{x^3}{1+x^2}$

5) Calcula las asíntotas verticales y estudia el comportamiento en sus proximidades, de la función

$$y = \frac{x^2+2}{x^2-2x}$$

6) Realiza un estudio global (dominio, simetrías, corte con los ejes, asíntotas, monotonía, extremos y representación gráfica) de la función:

$$f(x) = \frac{2x^2+2}{x^2-4}$$

7) Realiza un estudio global (dominio, simetrías, corte con los ejes, asíntotas, monotonía, extremos y representación gráfica) de la función:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

8) Realiza un estudio global (dominio, simetrías, corte con los ejes, asíntotas, monotonía, extremos y representación gráfica) de la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2-5x+4}$$

9) Realiza un estudio global (dominio, simetrías, corte con los ejes, asíntotas, monotonía, extremos y representación gráfica) de la función:

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2$$

10) Realiza un estudio global (dominio, simetrías, corte con los ejes, asíntotas, monotonía, extremos y representación gráfica) de la función:

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

11) Halla las asíntotas de la siguiente función y a partir de ellas, realiza un esbozo de su gráfica.

$$f(x) = \frac{x-1}{x+3}$$

12) Halla los extremos relativos de la función:

$$y = \frac{3x^2 + 3x + 11}{x + 1}$$

13) Halla los extremos relativos de la función $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

14) Halla los extremos relativos de la función $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

15) Estudia la monotonía de la función $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$

16) Estudia la monotonía de la función $y = -3x^4 + 4x^3 + 36x^2 - 90$

17) Estudia la monotonía de la función $f(x) = x^4 + 4x^3$

18) Disponemos de 48 metros de valla de alambre. Queremos cercar un rectángulo de siperficie la mayor posible. ¿Cuáles serían las dimensiones del rectángulo?

19) Halla las asíntotas de la función:

$$y = \frac{x^3}{2x^2 - 8}$$

20) Queremos fabricar latas con forma de cilindro y de capacidad 1 litro. Averigua las dimensiones de forma que tengamos que emplear la menor cantidad de material posible.